

Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 7 lutego 2025

Zadanie 1. Jeśli na tablicy zapisana jest para (a, b) , to można na niej zapisać parę $(-a, -b)$ lub $(-b, a + b)$. Ponadto jeśli na tablicy zapisane są pary (a, b) oraz (c, d) , to można dopisać także parę $(a + c, b + d)$.

Na tablicy zapisana jest para liczb $(1, 2)$. Czy postępując zgodnie z powyższymi regułami będzie można zapisać na tej tablicy parę $(2025, 2024)$?

Zadanie 2. Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 wybrano 330 różnych punktów. Wykazać, że istnieje koło o polu równym $\frac{1}{18}$, do którego należy co najmniej 10 z tych punktów.

Zadanie 3. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^6 - \left(\frac{x^{12}+1}{x^6} + 2\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)} \quad \text{dla } x > 0.$$

W jakim punkcie ta najmniejsza wartość jest osiągnana?

Zadanie 4. Wewnątrz trójkąta ABC wybrano taki punkt P , że

$$|\sphericalangle PAB| = 10^\circ, \quad |\sphericalangle PBA| = 20^\circ, \quad |\sphericalangle PCA| = 30^\circ, \quad |\sphericalangle PAC| = 40^\circ.$$

Udowodnić, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.