

Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap szkolny 4 grudnia 2024 r.

Zadanie 1. Wykaż, że liczba

$$l = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024}$$

jest podzielna przez 6.

Zadanie 2. Boki \overline{AB} i \overline{CD} czworokąta $ABCD$ zawarte są w prostych prostopadłych. Oblicz pole tego czworokąta wiedząc, że $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 17$ cm, $|CD| = 4$ cm, $|DA| = 5$ cm.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają równanie

$$[x] = \frac{2x \cdot \{x\}}{x + \{x\}}.$$

(Dla liczby rzeczywistej a symbol $[a]$ oznacza cechę liczby a , to znaczy największą liczbę całkowitą nie większą niż a , natomiast symbol $\{a\}$ oznacza mantysę liczby a zadaną przez warunek $\{a\} = a - [a]$.)

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją rosnącą. Wykaż, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{f(a) + a} + \frac{1}{f(b) + b} \geq \frac{1}{f(a) + b} + \frac{1}{f(b) + a}.$$

Zadanie 5. Prostokątny wycinek koła o promieniu R podzielono na dwie części okręgiem o promieniu R i środku w końcu łuku danego wycinka. Oblicz promień koła wpisanego w mniejszą z powstałych części pierwotnego wycinka.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.