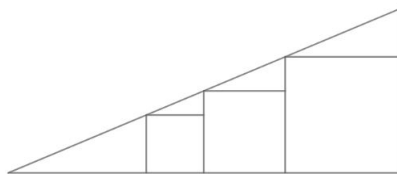


Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 6 lutego 2024

Zadanie 1. Wewnątrz trójkąta prostokątnego znajdują się trzy kwadraty, jak na rysunku:

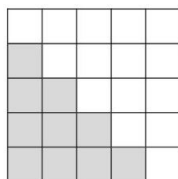


Uzasadnić, że długość boku kwadratu środkowego jest średnią geometryczną długości boków kwadratów zewnętrznych.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ spełniona jest nierówność

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2} + \dots + \frac{x_{2024}^3}{x_{2024}^2 + x_{2024}x_1 + x_1^2} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2024}}{3}.$$

Zadanie 3. Pola kwadratu 5×5 wypełniamy cyframi 1, 2, 3, 4, 5 tak, że w każdym wierszu, kolumnie i na każdej z głównych przekątnych znajdują się wszystkie te cyfry. Znaleźć najmniejszą i największą możliwą wartość sumy cyfr z dziesięciu zaznaczonych pól:



Zadanie 4. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ taki, że czworokąt $BCEF$ jest równoległobokiem, zaś trójkąt ABF jest równoboczny. Wiedząc, że w tym sześciokącie $|BC| = 1$, $|AD| = 3$ oraz $|CD| + |DE| = 2$, obliczyć jego pole.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.