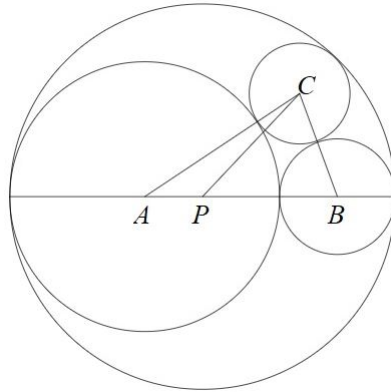


Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap szkolny 14 grudnia 2023 r.

Zadanie 1. Trzy okręgi o środkach A, B, C są parami zewnętrznie styczne oraz styczne wewnętrznie do okręgu o środku P . Punkty A, B leżą na średnicy okręgu o środku P . Wykaż, że trójkąty APC i BPC mają taki sam obwód równy średnicy dużego okręgu.



Zadanie 2. Symbolem $[a]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od a . Narysuj zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają warunek

$$[x]^2 + [y]^2 = 4.$$

Zadanie 3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB , punkt F należy do boku AD . Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P , a prostą CD w punkcie Q . Który z trójkątów CEF oraz APQ ma większe pole? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c spełniona jest nierówność

$$\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}.$$

Zadanie 5. Liczba rzeczywista x spełnia warunek $x^5 - x^3 + x = 2$. Pokaż, że $x^6 > 3$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
 2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
 3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
 4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Jury unieważni pracę.
 5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
 6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.
-