

# Tarnowski Turniej Matematyczny

etap szkolny w roku 2022/23

dnia 1 grudnia 2022 r.

**Zadanie 1.** W zbiorze liczb całkowitych wprowadzamy działanie  $*$  wzorem

$$x * y = x + (-1)^x \cdot y.$$

(a) Czy dla dowolnych liczb całkowitych  $x, y, z$  spełniony jest warunek

$$(x * y) * z = x * (y * z)?$$

(b) Czy działanie  $*$  ma element neutralny?

**Zadanie 2.** Dany jest trójkąt  $ABC$  i punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na bokach  $AB, BC$  i  $CA$ , różne od wierzchołków trójkąta. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach  $AKM, BKL$  i  $CLM$  przecinają się w jednym punkcie.

**Zadanie 3.** Michał poszedł do banku, żeby zrealizować wypłatę gotówki za pomocą czeku. Kasjer pomylił się i wypłacił tyle złotych, ile powinien wypłacić groszy, i tyle groszy, ile powinien wypłacić złotych. Michał nie przeliczył pieniędzy – włożył je do kieszeni nie zauważając, że wypadła mu przy tym pięciogroszówka. Przeliczył pieniądze dopiero w domu i stwierdził ze zdziwieniem, że ma kwotę dwa razy większą od wypisanej na czeku. Jaką sumę chciał wypłacić Michał?

**Zadanie 4.** W kwadrat jednostkowy wpisano czworokąt o bokach długości  $a, b, c, d$ , którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu. Pokaż, że

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

---

## Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.