

Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap szkolny 2 grudnia 2021r.

Zadanie 1. Dany jest taki ośmiokąt $ABCDEFGH$, w którym przekątne AE , BF , CG i DH mają długość 1 i przecinają się w jednym punkcie. Wykaż, że obwód tego ośmiokąta jest mniejszy od 8.

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia

$$a = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2021^2}\right).$$

Zadanie 3. Symbolem $[a]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od a . Rozwiąż równanie

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] \cdot \left[x + \frac{2}{3}\right] = 2 \cdot [x].$$

Zadanie 4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = 16$ oraz $|AC| = |BC| = 10$. Przez wierzchołek C tego trójkąta poprowadzono trzy proste przecinające bok AB w punktach K , L , M . Proste te podzieliły kąt wewnętrzny trójkąta przy wierzchołku C na cztery kąty przystające. Wyznacz długości odcinków $|CK|$, $|CL|$ i $|CM|$.

Zadanie 5. Czy istnieje taka liczba naturalna dodatnia n , dla której liczba

$$A = \frac{7^n - 1}{6^n - 1}$$

jest liczbą całkowitą? Odpowiedź uzasadnij.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.