

Tarnowski Turniej Matematyczny

etap finałowy w roku 2020/21

dnia 9 lutego 2021r.

Zadanie 1. W kwadracie $ABCD$ punkty E i F to środki odpowiednio boków BC i CD . Proste AE i BF przecinają się w punkcie P . Udowodnij, że $\angle AED = \angle ADP$.

Zadanie 2. Udowodnij, że istnieje wielomian rzeczywisty P taki, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n^2} [2\sqrt{k}] = P(n),$$

gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż a .

Zadanie 3. W trójkącie ABC dane są boki $AC = b$ i $BC = a$. Oblicz długość boku $AB = c$, jeżeli wiadomo, że środkowe AK i BL poprowadzone do danych boków są prostopadłe. Jaki warunek muszą spełniać boki a i b , aby zadanie miało rozwiązanie?

Zadanie 4. Wykaż, że równanie

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z, t , natomiast ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych różnych od zera.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
2. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
3. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.