

Tarnowski Turniej Matematyczny

Etap finałowy 20 lutego 2026 r.

Zadanie 1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y - \sqrt{x-1} = \frac{3}{y}, \\ x^2 y = \sqrt{x^5 - 4x^4} \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych.

Zadanie 2. Ania i Zbyszek z nudów przeliczyli zapalki w pudełku i okazało się, że jest ich 48. Postanowili zagrać w następującą grę: będą na zmianę wyjmować z pudełka zapalki aż do całkowitego opróżnienia pudełka. Żeby było ciekawiej, ustalili, że w jednym ruchu każde z nich może wyjąć tylko albo 1 zapalkę, albo 2, albo 5, a wygrywa to z nich, które po ostatnim ruchu pozostawi pudełko puste. Grę rozpoczyna Ania. Czy ma ona strategię wygrywającą, a jeśli tak, to jaki wykona pierwszy ruch? Czy sytuacja zmieniłaby się, gdyby reguły gry pozostały takie same, ale w pudełku byłoby 49 zapalek?

Zadanie 3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości a . Trójkąt KLM otrzymano, zginając trójkąt ABC wzdłuż linii KL ($K \in AC$, $L \in BC$) w taki sposób, że wierzchołek C znalazł się w punkcie M na boku AB , przy czym $|AM| = \frac{1}{3}a$. Wyznaczyć długość odcinka KL .

Zadanie 4. Dla danych liczb całkowitych b i a_1, a_2, \dots, a_{20} zachodzi równość

$$b^{11} = a_1^{11} + a_2^{11} + \dots + a_{20}^{11}.$$

Udowodnić, że iloczyn $b \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{20}$ jest liczbą podzielną przez 23.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 120 minut (2 godziny).
2. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Każdy arkusz należy podpisać (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem oraz nazwą szkoły.
3. W przypadku np. konieczności otrzymania dodatkowego papieru należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Jury unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych (te powinny być bezwzględnie wyłączone) i innych urządzeń elektronicznych.
6. Nie należy używać w pracy koloru czerwonego.